

SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES *PI* Y *PID* UTILIZANDO MODELOS DE POLO DOBLE MÁS TIEMPO MUERTO

Eugenia Solera Saborío
Víctor M. Alfaro Ruiz

Resumen

Se presentan nuevas reglas para la sintonización de controladores *PI* y *PID* que optimizan los criterios de error integral *IAE* e *ITAE*, con base en un modelo de segundo orden (polo doble) más tiempo muerto. Mediante comparación por simulación, se muestran las ventajas obtenidas al utilizar estas nuevas ecuaciones sobre las que emplean modelos de primer orden.

Palabras clave: controladores *PID*, sintonización *IAE*, *ITAE*, modelos de segundo orden

Abstract

New tuning rules for *IAE* and *ITAE* optimum *PI* and *PID* controllers, based on a second order (dual pole) plus time delay model are presented. Using digital simulation, the advantages of the new tuning rules over the ones that use first order models are demonstrated.

Keywords: *PID* controllers, *IAE*, *ITAE* tuning rules, second order models

Recibido: 16 de marzo del 2006 • **Aprobado:** 21 de marzo del 2006

1. INTRODUCCIÓN

La sintonización del controlador de un lazo de control realimentado como el mostrado en la Figura 1, requiere que se establezca primeramente el tipo de funcionamiento esperado del lazo de control, esto es, si su respuesta y debe seguir los cambios en el valor deseado r (*servomecanismo*), o si más bien es de mayor importancia su respuesta ante cambios en las perturbaciones de carga z (*regulador*), así como la forma en que se espera realice esto. Debe, por lo tanto, establecerse el comportamiento deseado de la salida del lazo de control, ante los cambios en sus entradas.

Una forma habitual de especificar el comportamiento deseado del lazo de control, es requerir que el mismo optimice alguna función de costo dependiente del error. Las más utilizadas son la integral del error absoluto (*IAE*) y la integral del tiempo por el error absoluto (*ITAE*). Además, es necesario tener información del comportamiento dinámico del

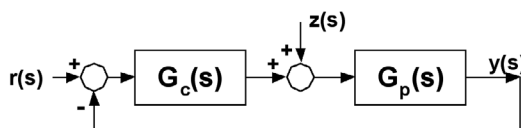


Figura 1. Lazo de control realimentado.

Fuente: (Los autores, 2006)

proceso controlado, el cual normalmente está representado por un modelo de orden reducido.

Las reglas para la sintonización del controlador $G_c(s)$ dependerán entonces de su tipo (*PI* o *PID*), de la información del proceso contenida en el modelo $G_p(s)$, del índice de desempeño optimizado (*IAE* o *ITAE*) y del funcionamiento primordial del lazo de control (*servomecanismo* o *regulador*).

2. SINTONIZACIÓN DE LOS CONTROLADORES

En la literatura técnica se puede encontrar una gran cantidad de reglas para la sintonización de

$$G_{cPI}(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (1)$$

PID-Ideal

$$G_{cPIDi}(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2)$$

o *PID-Serie*

$$G_{cPIDs}(s) = K_c \frac{(T_i s + 1)(T_d s + 1)}{T_i s} \quad (3)$$

que optimizan el criterio *IAE*

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (4)$$

o el *ITAE*

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (5)$$

a partir de un modelo de primer orden más tiempo muerto

$$G_p(s) = \frac{k_p e^{-t_m s}}{\tau s + 1} \quad (6)$$

como las de Alfaro (2003), Arrieta & Alfaro (2003), Kaya & Sheib (1988), López et al (1967), y Rovira et al (1969) entre otras. La mayoría de estas son aplicables para un tiempo muerto normalizado del modelo en el ámbito $0,10 \leq t_m / \tau \leq 1,0$, aunque las de Alfaro se pueden utilizar en un ámbito más amplio $0,05 \leq t_m / \tau \leq 2,0$.

Este tipo de reglas es abundante por la facilidad con que se puede identificar el modelo de primer orden más tiempo muerto, ya sea a partir de su curva de reacción, o con la información crítica del lazo de control obtenida con un controlador *P*.

Sin embargo, para modelos de orden superior, la cantidad de reglas de sintonización que optimizan

un criterio de error integral encontradas en la literatura, es considerablemente menor. Además, las expresiones de las ecuaciones para el cálculo de los parámetros del controlador son significativamente más complejas. Entre estas se pueden citar las reglas de Hwang (1995) y las de Sung et al (1996) a partir de modelos de segundo orden más tiempo muerto.

O'Dwyer (2000) presenta una recopilación bastante amplia de procedimientos de sintonización de controladores a partir de diversos modelos y con criterios de desempeño disímiles.

3. NUEVAS REGLAS DE SINTONIZACIÓN

Cuando el proceso controlado es de orden dos o superior, y además tiene dos constantes de tiempo significativamente mayores que las demás, un modelo de segundo orden de polo doble más tiempo muerto dado por la expresión (7):

$$G'_p(s) = \frac{k_p e^{-t'_m s}}{(\tau' s + 1)^2} \quad (7)$$

usualmente permite una mejor representación de las características dinámicas del proceso. Además, este modelo tiene la ventaja de poderse identificar con la misma información con que se identifica el modelo de primer orden más tiempo muerto, por contar con igual cantidad de parámetros.

Aprovechando la bondad y simplicidad del modelo de polo doble, Solera (2005) desarrolló un nuevo conjunto de reglas para la sintonización de controladores *PI* y *PID* operando como servomecanismo y como regulador, para valores del tiempo muerto normalizado ($\tau'_0 = t'_m / \tau'$) en el ámbito $0.05 \leq \tau'_0 \leq 2.0$ que optimizan los criterios de error integral *IAE* e *ITAE*. A continuación se presentan las ecuaciones del nuevo procedimiento para el cálculo de los parámetros de los controladores y más adelante se compara el comportamiento de los lazos de control sintonizados con estas reglas, con el

obtenido con los controladores sintonizados con reglas similares, pero que emplean modelos de primer orden.

donde las constantes *a* a *i* se muestran en el Cuadro 1 para el caso del regulador y en el Cuadro 2, para el del servomecanismo.

3.1 Ecuaciones

Identificado un modelo de polo doble para el proceso dado por (7), los parámetros normalizados de los controladores se obtienen con las ecuaciones (8) y (9).

- Controladores *PI*

$$K_c k_p = a + b\tau_o^c$$

$$\frac{T_i}{\tau} = d + e\tau_o^f \tag{8}$$

- Controladores *PID* (*Ideal o Serie*)

$$K_c k_p = a + b\tau_o^c$$

$$\frac{T_i}{\tau} = d + e\tau_o^f$$

$$\frac{T_d}{\tau} = g + h\tau_o^i \tag{9}$$

3.2 Ejemplo

Un estudio comparativo del comportamiento dinámico de los lazos de control con un controlador sintonizado con el nuevo procedimiento, con el obtenido cuando se emplea una regla que utiliza un modelo de primer orden, permitió comprobar sus bondades.

La planta utilizada y los modelos identificados para la misma se muestran en el Anexo A. A partir de estos se calcularon los parámetros de los controladores *PI* y *PID* empleando las reglas de Arrieta (2003) con el modelo de primer orden más tiempo muerto, y las desarrolladas por Solera utilizando el modelo de polo doble más tiempo muerto, tanto para el criterio *IAE* como el *ITAE*, para el caso del servomecanismo y del regulador.

En el Cuadro 3 se resumen los resultados comparativos para el caso particular de los controladores *PI* y *PID* optimizados bajo el

Cuadro 1. Constantes de las ecuaciones de sintonización. Reguladores.

Ámbito	a	b	c	d	e	f	g	h	i	
				Controlador PI – Criterio IAE						
$0,05 \leq \tau_o \leq 2,0$	0,1234	1,0640	-0,9487	2,4800	0,0607	2,0550	-	-	-	
				Controlador PI – Criterio ITAE						
$0,05 \leq \tau_o \leq 2,0$	0,0	0,9239	-0,8616	2,0230	0,1336	1,3590	-	-	-	
				Controlador PID Ideal – Criterio IAE						
$0,05 \leq \tau_o \leq 2,0$	0,6199	1,1080	-1,4810	-1,1940	2,8340	0,2686	-0,2729	1,0640	0,3251	
				Controlador PID Ideal – Criterio ITAE						
$0,05 \leq \tau_o \leq 2,0$	0,5361	1,1210	-1,4470	-2,9570	4,7350	0,1556	-0,2507	0,9522	0,3039	
				Controlador PID Serie – Criterio IAE						
$0,05 \leq \tau_o \leq 0,65$	0,0	1,0700	-1,2700	0,0	1,7880	0,6295	-0,5854	1,5870	0,2590	
$0,65 \leq \tau_o \leq 2,0$	0,0	1,0700	-1,2700	0,0	1,4160	0,2451	-0,5854	1,5870	0,2590	
				Controlador PID Serie – Criterio ITAE						
$0,05 \leq \tau_o \leq 2,0$	0,4358	0,4530	-1,6710	0,0	1,2490	0,3241	-1,0090	2,0090	0,1842	

Fuente: (Solera, 2005)

índice *ITAE* ante un cambio escalón en el valor deseado (servomecanismo), y en el Cuadro 4, las características de las respuestas a un cambio escalón en la perturbación (regulador).

Los resultados muestran claramente cómo existen diferencias entre el comportamiento dinámico que se obtiene cuando los controladores se sintonizan utilizando la información de un modelo de

Cuadro 2. Constantes de las ecuaciones de sintonización. Servomecanismos.

Ámbito	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Controlador PI – Criterio IAE									
$0,05 \leq \tau_0 \leq 0,65$	0,0	0,8629	-0,5814	0,0	2,1360	-0,0861	-	-	-
$0,65 \leq \tau_0 \leq 2,0$	0,0	0,8629	-0,5817	2,2440	0,0555	3,1930	-	-	-
Controlador PI – Criterio ITAE									
$0,05 \leq \tau_0 \leq 0,35$	0,0	0,6477	-0,4927	0,0	1,7270	-0,0429	-	-	-
$0,35 \leq \tau_0 \leq 2,0$	0,0	0,6477	-0,4927	1,7910	0,1012	1,7720	-	-	-
Controlador PID Ideal – Criterio IAE									
$0,05 \leq \tau_0 \leq 0,45$	0,0	1,2460	0,8050	2,1420	-0,1356	-0,2790	0,4523	0,2477	0,9587
$0,45 \leq \tau_0 \leq 2,0$	0,0	1,2460	-0,8050	1,9630	0,0805	2,2110	0,4523	0,2477	0,9587
Controlador PID Ideal – Criterio ITAE									
$0,05 \leq \tau_0 \leq 0,65$	0,3094	0,8471	-0,9218	1,6980	0,3713	0,2957	0,4629	0,1414	1,2750
$0,65 \leq \tau_0 \leq 2,0$	0,3004	0,8471	-0,9218	1,9390	0,1489	1,5930	0,4629	0,1414	1,2750
Controlador PID Serie – Criterio IAE									
$0,05 \leq \tau_0 \leq 0,45$	0,0	0,7202	-0,9103	0,0	1,1940	-0,0834	0,0	1,0770	0,2215
$0,65 \leq \tau_0 \leq 2,0$	0,0	0,7202	-0,9103	1,2080	0,1729	1,1230	0,0	1,0770	0,2215
Controlador PID Serie – Criterio ITAE									
$0,05 \leq \tau_0 \leq 0,15$	0,0	0,5936	-0,8046	0,0	1,0560	-0,0276	0,7419	0,3203	0,5336
$0,15 \leq \tau_0 \leq 2,0$	0,0	0,5936	-0,8046	1,0650	0,1370	1,2240	0,7419	0,3203	0,5336

Fuente: (Solera, 2005)

Cuadro 3. Comportamiento dinámico del servomecanismo.

τ_p	Cont.	Método de Arrieta				Método de Solera			
		$M_{p\%}$	t_p	$t_{a2\%}$	ITAE	$M_{p\%}$	t_p	$t_{a2\%}$	ITAE
0,25	PI	9,79	5,77	7,67	5,42	4,89	5,63	7,02	5,40
	PID	5,71	4,46	5,91	2,47	3,26	2,46	2,74	0,99
0,50	PI	7,75	7,35	9,67	9,51	3,67	7,48	8,93	9,37
	PID	5,31	5,63	7,30	4,40	2,45	4,33	4,93	2,61
0,75	PI	6,53	9,59	18,28	17,01	4,49	9,45	18,28	16,81
	PID	6,12	7,05	9,38	8,44	4,49	6,30	8,08	6,03
1,0	PI	6,12	12,74	24,11	30,18	6,12	12,74	24,11	30,12
	PID	6,94	9,52	17,67	15,99	5,31	8,56	11,23	12,06

Fuente: (Los autores, 2006)

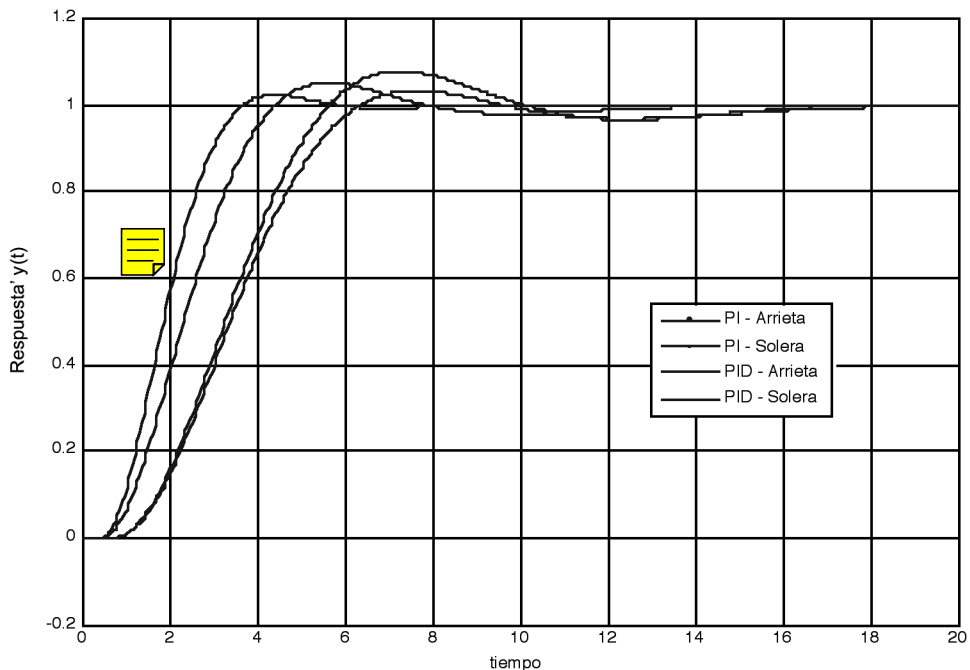
Cuadro 4. Comportamiento dinámico del regulador.

τ_p	Cont.	Método de Arrieta				Método de Solera			
		e_{\max}	t_p	$t_{a2\%}$	<i>ITAE</i>	e_{\max}	t_p	$t_{a2\%}$	<i>ITAE</i>
0,25	<i>PI</i>	0,41	3,36	12,63	6,74	0,34	2,82	10,63	5,91
	<i>PID</i>	0,29	2,82	8,36	3,39	0,14	1,82	3,09	0,71
0,50	<i>PI</i>	0,50	4,45	16,36	14,44	0,48	4,18	15,63	13,91
	<i>PID</i>	0,37	3,72	10,73	7,20	0,28	3,18	7,64	3,20
0,75	<i>PI</i>	0,60	6,00	21,82	29,91	0,60	6,00	21,54	29,37
	<i>PID</i>	0,47	5,18	14,45	14,95	0,40	4,82	12,54	10,09
1,0	<i>PI</i>	0,63	8,13	29,19	56,54	0,63	8,13	29,19	55,19
	<i>PID</i>	0,50	6,98	19,07	28,74	0,45	6,63	17,09	21,47

Fuente: (Los autores, 2006)

primer orden, con el logrado a partir del modelo de polo doble, así como entre el desempeño del lazo con un controlador *PI* respecto al del lazo con un *PID*. Como se observa, esta diferencia es más significativa en el caso del regulador. Si se comparan para las cuatro plantas de prueba utilizadas, los valores del índice *ITAE* de la respuesta del servomecanismo con controladores *PI*, se puede apreciar que la disminución en este índice, al emplear el modelo de polo doble, es

en promedio apenas un 1 %. En este caso no hay ventaja significativa en emplear el modelo de orden mayor. En el caso del regulador con el controlador *PI*, se obtienen disminuciones en el índice *ITAE* mayores, entre el 2 % y el 13 %. Con el controlador *PID*, la reducción en el índice *ITAE* como servomecanismo varía entre un 25 % y un 60 % y en el caso del regulador entre un 25 % y un 80 %. Esto representa una mejora sustancial en el comportamiento del lazo de control.

**Figura 2.** Respuesta a un cambio escalón en el valor deseado ($\tau_p=0,50$).

Fuente: (Los autores, 2006)

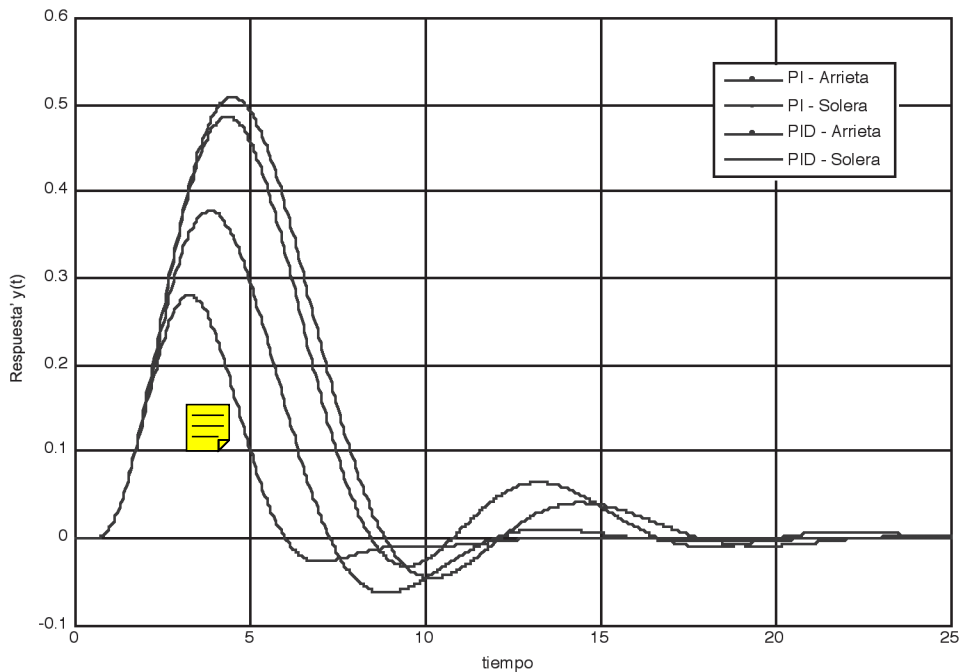


Figura 3. Respuesta a un cambio escalón en la perturbación de carga ($\tau_p=0,50$).

Fuente: (Los autores, 2006)

Como se puede observar en los cuadros comparativos, las respuestas obtenidas con el controlador *PID* sintonizado con el nuevo procedimiento, son las que tienen, en todos los casos, el menor sobrepaso o error máximo, el menor tiempo al pico, el menor tiempo de asentamiento y el menor índice de error integral. En resumen, estas son las mejores respuestas para el regulador y para el servomecanismo, por lo que se han destacado ligeramente sobre las demás. Lo anterior se aprecia claramente en las Figuras 2 y 3 en donde se muestran las respuestas a un cambio escalón en el valor deseado y en la perturbación para la planta con $\tau_p=0,50$.

CONCLUSIONES

1. Los resultados de las pruebas comparativas efectuadas confirman que la exactitud con que el modelo utilizado para la sintonización de los controladores representa al proceso controlado, afecta el desempeño del sistema de control obtenido. Por esta razón, es

recomendable emplear en lo posible, un modelo de segundo orden (polo doble) más tiempo muerto para la sintonización de los controladores, en vez de un modelo de primer orden más simple.

2. Con base en estas mismas pruebas, se puede afirmar que esta mejora en el desempeño del lazo de control es mayor cuando se utiliza un controlador *PID*, tanto ante un cambio en el valor deseado como a uno en las perturbaciones de carga.
3. Las ecuaciones deducidas para sintonizar los controladores a partir del modelo de polo doble, son muy simples y de fácil utilización, se puede apreciar de las expresiones presentadas en la Sección 3.1.
4. Por lo tanto, como la identificación de los parámetros del modelo de polo doble no presenta ninguna dificultad adicional, respecto a la identificación de los modelos de primer orden, se recomienda el uso de las nuevas

reglas presentadas para la sintonización de los controladores y en especial para la de los PID, como una manera de lograr un mejor desempeño del lazo de control con base en los criterios de error integral IAE e ITAE.

SIMBOLOGÍA

$e(t)$	señal de error
e_{max}	error máximo
$G_c(s)$	función de transferencia del controlador
$G_p(s)$	función de transferencia del modelo
K_c	ganancia del controlador
k_p	ganancia estática del modelo
IAE	integral del error absoluto
ITAE	integral del tiempo por el error absoluto
$M_p\%$	sobrepaso máximo
$r(t)$	valor deseado
s	variable compleja
τ, τ'	constante de tiempo del modelo
τ_o, τ'_o	tiempo muerto relativo del modelo
$t_{d2\%}$	tiempo de asentamiento
T_d	tiempo derivativo del controlador
T_i	tiempo integral del controlador
t_m, t'_m	tiempo muerto aparente del modelo
t_p	tiempo al pico
$y(t)$	variable controlada
$z(t)$	perturbación

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alfaro, V. M. (2003). Optimización del desempeño de los reguladores y servomecanismos PID. *Ingeniería*, 13(1,2), 53-62.
- Arrieta, O. (2003). *Comparación del desempeño de los métodos de sintonización de controladores PI y PID basados en criterios integrales*. Proyecto de graduación para optar por el grado de Bachiller en Ingeniería Eléctrica, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- Arrieta, O. & Alfaro, V. M. (2003). Sintonización de controladores PI y PID utilizando los criterios integrales IAE e ITAE. *Ingeniería*, 13(1, 2), 31-39.
- Hwang, S. H. (1995). Industrial Engineering Chemistry Research. In: O'Dwyer, A. (Ed.), *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. London: Imperial College Press.
- Kaya, A. & Sheib, T. J. (1988). Tuning of PID controllers of different structures. *Control Engineering, Dicember*.
- López, A. M., Miller, J. A., Smith, C. L. & Murrill, P.W. (1967). Tuning controllers with error-integral criteria. *Instrumentation Technology, November*.
- O'Dwyer, A. (2000). *PI and PID controller tuning rules for time delay processes: a summary*. Dublin, Ireland: School of Control Systems and Electrical Engineering, Dublin Institute of Technology.
- Rovira, A., Murrill, P. W. & Smith, C. L. (1969). Tuning controllers for setpoint changes. *Instrumentation & Control Systems, Dicember*.
- Solera, E. (2005). *Sintonización de controladores PI/PID con los criterios IAE e ITAE, para plantas de polo doble*. Proyecto para optar por el grado de Bachiller en Ingeniería Eléctrica, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

Sung, S. W., O, J., Lee, I. B., Lee, J. & Yy, S. H. (1996). Automatic tuning of PID controller using second-order plus time delay model. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 29(6), 990-999.

SOBRE LA AUTORA Y EL AUTOR

Eugenia Solera Saborío

Ingeniera Eléctrica.
Estudiante de Licenciatura en Ingeniería Eléctrica,
Universidad de Costa Rica.

Teléfono: 895-9120
Facsímil: 441-5818
Correo electrónico: eugess@gmail.com

Víctor M. Alfaro Ruiz

M. Sc., Catedrático.
Departamento de Automática, Escuela de
Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica.
Teléfono: 207.3892
Facsímil: 207.3920
Apartado postal 2-10 2060UCR, San José, Costa
Rica.
Correo electrónico: valfaro@eie.ucr.ac.cr

ANEXO A

Para la prueba y comparación del nuevo método de sintonización, se utilizó una planta dada por la función de transferencia

$$G_{po}(s) = \frac{e^{-0,20s}}{(2s+1)(s+1)(\tau_p s+1)(\tau_p^2 s+1)(\tau_p^3 s+1)} \quad (\text{A.1})$$

con $\tau_p = 0,25; 0,50; 0,75$ y $1,0$

Los parámetros de los modelos de primer orden y polo doble más tiempo muerto identificados con el método “1/4 – 3/4” de Alfaro, se muestran en el Cuadro A.1

Cuadro A.1. Parámetros de los modelos.

Planta	Primer orden + t_m				Polo doble + t_m		
	τ_p	k_p	t_m	τ	τ_0	t'_m	τ'
0,25	1,0	1,22	2,41	0,51	0,44	1,53	0,29
0,50	1,0	1,70	2,50	0,68	0,90	1,59	0,57
0,75	1,0	2,39	2,73	0,88	1,50	1,73	0,87
1,00	1,0	3,22	3,26	0,99	2,17	2,07	1,05

Fuente: (Los autores, 2006)