

DISEÑO DE FILTROS DIGITALES FIR DE FASE LINEAL USANDO MUESTRAS ESPACIADAS DE ACUERDO CON LAS POSICIONES DE LOS CEROS DE POLINOMIOS ORTOGONALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

Jorge A. Romero Chacón.

Resumen

Un método novedoso para el diseño de filtros digitales de respuesta finita al impulso y fase lineal se propone con base en la técnica de muestreo en frecuencia, donde las muestras son colocadas de acuerdo con la posición de los ceros de polinomios ortogonales clásicos (Jacobi, Hermite, Laguerre). Tales posiciones son inherentemente no uniformes. Se realiza una justificación del método con base en la aplicación del teorema de muestreo generalizado de Kramer, para generar expansiones de muestreo que permiten su aplicación directa al problema del diseño de filtros digitales. Los resultados obtenidos muestran una banda de transición más angosta y una atenuación mínima tan buena o mejor que otros resultados que usan el mismo número de coeficientes en diseños provenientes de la aplicación de la técnica de ventanas.

Palabras clave: Polinomios; funciones ortogonales; filtros digitales; tratamiento y detección de señales.

Abstract

A novel method for the design of linear phase finite impulse response digital filters is proposed based on the frequency sampling technique, where the samples are placed according to the location of the roots of classical orthogonal polynomials (Jacobi, Hermite, Laguerre). These locations are nonuniform in nature. The method is shown to be based on an application of Kramer's generalized sampling theorem that generates sampling expansions that allow for a direct application to the digital filter design problem. The results obtained show a narrower transition band and a minimum attenuation as good as or better than other results that have the same number of coefficients in designs performed according to the window technique.

Keywords: polynomials, orthogonal functions, digital filters, signal processing and detection.

1. INTRODUCCIÓN

Los filtros de respuesta finita al impulso (cuya traducción al inglés se abrevia con las siglas FIR, *finite impulse response*) tienen la ventaja de ser compelidos con facilidad a poseer fase lineal para una respuesta al impulso par o impar. Como tal propiedad es de suma importancia en la práctica, las técnicas de diseño de filtros FIR son de interés considerable. Hay cuatro de ellas que a continuación se enumeran: (1) la técnica de función ventana; (2) la técnica de muestreo en frecuencia; (3) la técnica de diseños con rizado uniforme y, (4) la técnica del diseño máximamente plano^{1,3}.

Si bien es cierto que de las técnicas mencionadas, las más populares son la primera y la tercera⁴, en

este artículo se tratará con la segunda técnica, por la oportunidad que se ofrece de aportar una novedad al estado de la cuestión. Si se denota con $H_d(\omega)$ la respuesta en frecuencia deseada para un filtro FIR, su respuesta al impulso puede denotarse por $h_d[n]$. Ambos conceptos están relacionados por el par de ecuaciones

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n T} \quad (1)$$

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n T} d\omega \quad (2)$$

Como $H_d(\omega)$ es una función periódica, las dos ecuaciones anteriores definen una serie infinita de Fourier con $h_d[n]$ como los coeficientes. Sin

embargo, debido a las limitaciones prácticas de cálculo computacional, la respuesta en frecuencia del filtro FIR está dada por

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^M h[n] e^{-j\omega n T} \quad (3)$$

La ecuación anterior es una aproximación a $H_d(\omega)$ mediante una serie finita de Fourier. Para diseñar un filtro FIR basta truncar la respuesta ideal $h_d[n]$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq M$ para producir $h[n]$:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases} \quad (4)$$

El diseño especificado por la ecuación anterior es la aproximación de $H_d(\omega)$ por $H(\omega)$ basada en el mínimo error cuadrático medio; tal error se obtiene truncando la serie infinita de Fourier correspondiente a tal función. Sin embargo, el truncamiento de la serie de Fourier origina el conocido fenómeno de Gibbs en $H(\omega)$ especialmente si $H_d(\omega)$ es discontinua⁶. Como los filtros son idealmente discontinuos en los bordes de sus bandas de transición, el simple truncamiento de la respuesta al impulso producirá usualmente un diseño inaceptable.

En vez de calcular los valores en tiempo discreto que caracterizan a la respuesta al impulso $h[n]$, la técnica de diseño de filtros digitales conocida como muestreo en frecuencia, postula colocar las muestras de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ en puntos espaciados uniformemente y con valores adecuados, para satisfacer el diseño propuesto¹. El cálculo de los coeficientes de la respuesta al impulso podría entonces hacerse utilizando expresiones equivalentes a la ecuación (2).

La técnica de muestreo en frecuencia fue pensada originalmente para emplear muestras en frecuencia espaciadas uniformemente. Sin embargo, ha habido mucho interés en emplear muestras espaciadas no uniformemente por dos razones fundamentales: primera, se busca una manera de colocar valores de la respuesta en

frecuencia en puntos escogidos específicamente y que no están separados entre sí uniformemente, sea ya en una o dos dimensiones y, segunda, se busca el diseño eficiente de filtros FIR que requieren de un menor número de operaciones aritméticas en su realización que los filtros convencionales.

Un vistazo a los aportes que han aparecido en la literatura⁷⁻¹⁵ indica que se ha buscado proponer métodos que coloquen las muestras en frecuencia en posiciones arbitrarias, de modo tal que el método sea lo más aplicable posible a situaciones generales. En este artículo, se propone un esquema de muestreo no uniforme definido por las posiciones de las raíces de los polinomios ortogonales de Laguerre, cuyas posiciones varían conforme a la variación experimentada por un parámetro α determinado. Para justificar la propuesta de este esquema no uniforme, se debe primero presentar la forma como las raíces del polinomio de Laguerre determinan una expansión que puede emplearse para representar una función cualquiera; esto se hace en las secciones 2, 3 y 4. Posteriormente, en la sección 5, se mostrará el método para el diseño de filtros digitales basado en la posición de tales raíces.

2. LA TEORÍA DE NÚCLEOS REPRODUCTORES PARA ESPACIOS FINITOS DE SEÑALES

La teoría de los núcleos reproductores procede del trabajo de matemáticos como G. Szegő (1921) y S. Bergman (1922)¹⁶. Se requiere algunas definiciones previas para comprender su significado.

Definición 1: Sea V un espacio lineal. Una norma en V es una regla γ que asigna un número real $\gamma(\varphi)$ a cada $\varphi \in V$ y que satisface los siguientes axiomas ($\varphi, \psi \in V$, α cualquier número complejo):

1. $\gamma(\alpha\varphi) = |\alpha|\gamma(\varphi)$
2. $\gamma(\varphi + \psi) = \gamma(\varphi) + \gamma(\psi)$
3. $\gamma(\varphi) = 0$ implica que $\varphi = \emptyset$
(\emptyset es el elemento cero en V)

Definición 2: Sea I cualquier intervalo abierto $a < x < b$ sobre la recta numérica. Una función $f(x)$ es integrable cuadráticamente en I si es una función integrable localmente en I tal que

$$\alpha_0(f) = \left[\int_I |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

con $\alpha_0(f) < \infty$.

Lo anterior define un espacio lineal completo $L_2(I)$, con un elemento cero que es la clase de todas aquellas funciones que son iguales a cero sobre todo casi I ; α_0 es una norma en $L_2(I)$.

Definición 3: Un producto interno es una regla que asigna un número complejo (f, g) a cada par ordenado f, g de elementos en $L_2(I)$ definido por

$$(f, g) = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \quad (6)$$

donde la barra sobre $g(x)$ indica su complejo conjugado.

Del concepto de producto interno se sigue que un conjunto de funciones ortonormales $\{\psi_n\}$ es completo si todo elemento $f \in L_2(I)$ puede expandirse en la serie^a

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \psi_n \quad (7)$$

que converge en $L_2(I)$, es decir,

$$\alpha_0 \left(f - \sum_{n=0}^N (f, \psi_n) \psi_n \right) \rightarrow 0 \quad (8)$$

conforme N tiende a infinito.

Definición 4: Un espacio con producto interno sobre el conjunto de números complejos (o el conjunto de números reales), que es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno, se le llama espacio complejo (o real) de Hilbert, respectivamente.

Definición 5: Sea X una clase de funciones definida en E que forman un espacio de Hilbert (complejo o real). La función $K(x, y)$ de x e y en

E se llama núcleo reproductor de X si

1. Para todo y , $K(x, y)$ como función de x pertenece a X .
2. Para todo $y \in E$ y todo $f \in X$,

$$f(y) = (f(x), K(x, y))_x \quad (9)$$

donde el subíndice x indica que el producto interno es aplicado a funciones de x [17]. A esto se le llama la propiedad reproductora del núcleo.

El núcleo reproductor, cuando existe, es único para un espacio de Hilbert. Se procederá a calcularlo para espacios finitos que se originan de transformaciones implícitas en algunas expansiones en series ortonormales. Dado un conjunto de funciones ortonormales $\{\psi_n\}$, todo $f \in L_2(I)$ (el conjunto de señales de energía finita definidas sobre el intervalo I) es expresable en la forma

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \psi_n \quad (10)$$

con

$$F(n) = \int_I f(x) \psi_n(x) dx \quad (11)$$

I denota el intervalo sobre la recta numérica donde la ortonormalidad existe. $F(n)$ es el resultado del producto interno de cada función ortonormal con f . $F(n)$ puede tomar cualquier valor, pero sólo para puntos discretos n ; esta es la característica principal de una transformación discreta.

La expansión en series ortonormal anterior puede relacionarse con la expansión en series de Fourier para una señal periódica. Cuando se calcula la transformada de Fourier de una serie de Fourier para una señal periódica, se obtiene una secuencia de impulsos centrados en puntos separados por una distancia inversamente proporcional al periodo de la señal. Esta secuencia de impulsos define el espectro de línea de la señal periódica. La amplitud de cada impulso es el valor del correspondiente coeficiente en la expansión. Cuando la señal periódica se descompone en un

número finito de armónicas, la expansión de la serie de Fourier se reduce a una suma finita. Similarmente, supóngase que f es descomponible en una suma finita de $N+1$ funciones base, de modo que f puede decirse que es de soporte finito N sobre el conjunto discreto de puntos $\{n\}$, lo que significa que para valores $n > N$, $F(n) = 0$. Esto puede verse como la contraparte discreta del concepto de señales de banda limitada del dominio de la transformada de Fourier. Una extensión de este concepto para una transformación integral que produce un espectro continuo para una variable continua λ postularía que el soporte finito es sobre un conjunto de valores continuo y acotado de la variable λ . Para el caso de señales con soporte finito N sobre el dominio de una transformación discreta,

$$f = \sum_{n=0}^N F(n) \psi_n(x) \quad (12)$$

Los coeficientes de la expansión correspondiente al núcleo reproductor $K(x, y)$ del tipo de espacio de señales que se considera aquí, serían calculados por medio de

$$K(n, y) = \int_{\mathcal{I}} K(x, y) \psi_n(x) dx \quad (13)$$

que es igual, debido a la propiedad reproductora de $K(x, y)$, a $\psi_n(y)$. Si se expande ahora $K(x, y)$ en términos del conjunto $\{\psi_n\}$,

Si ahora al conjunto $\{\psi_n\}$ de funciones ortonor-

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^N K(n, y) \psi_n(x) = \sum_{n=0}^N \psi_n(y) \psi_n(x) \quad (14)$$

males se le identifica con los polinomios ortogonales clásicos de Jacobi, Hermite y Laguerre, que definen transformaciones integrales para otras tantas expansiones en series ortonormales, cada miembro del conjunto $\{\psi_n\}$ pudiera escribirse^[19] como

$$\psi_n(x) = \left[\frac{w(x)}{h_n} \right]^{\frac{1}{2}} p_n(x) \quad (15)$$

donde $p_n(x)$ es el polinomio de orden n , $w(x)$ es la función peso que define la ortogonalidad sobre el intervalo I y h_n es el factor de normalización para la ortonormalidad sobre I . El núcleo reproductor puede entonces escribirse en la forma,

$$K(x, y) = [w(x)w(y)]^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^N \left[\frac{p_n(x)p_n(y)}{h_n} \right] \quad (16)$$

Si se aplica ahora la identidad de Christoffel-Darboux [20], válida para los polinomios ortogonales mencionados, (ver ecuación 17) donde k_N es el coeficiente de mayor valor del polinomio ortogonal de orden N y h_N su correspondiente factor normalizante. En la referencia [21] se muestra los valores respectivos de tales parámetros para los polinomios ortogonales mencionados. En particular, para la transformación de Laguerre, definida para el intervalo $[0, \infty[$ con base en los polinomios de Laguerre generalizados, L_n^α , de orden n y parámetro $\alpha > -1$, (ver ecuación 18)

donde $\Gamma(x)$ representa la función gamma evaluada en el argumento x .

$$K(x, y) = [w(x)w(y)]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{k_N}{k_{N+1}} \right\} \left\{ \frac{p_{N+1}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N+1}(y)}{h_N(x-y)} \right\} \quad (17)$$

$$K(x, y) = (xy)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{(x+y)}{2}} \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(N+\alpha+1)} \left\{ \frac{L_N^\alpha(x)L_{N+1}^\alpha(y) - L_{N+1}^\alpha(x)L_N^\alpha(y)}{x-y} \right\} \quad (18)$$

3. EXPANSIONES DE MUESTREO OBTENIDAS A PARTIR DE NÚCLEOS REPRODUCTORES DE ESPACIOS FINITOS DE SEÑALES

En Ingeniería Eléctrica estamos familiarizados con la expansión de muestreo de Shannon, de gran valor en Telecomunicaciones, en donde una serie de funciones ortogonales, utilizando como coeficientes las muestras de una señal, son utilizadas para representar tal señal. En forma de teorema, se dice que si una función f no contiene frecuencias superiores a W Hz, esta está completamente determinada dando sus valores en una serie de puntos espaciados $(1/2W)$ segundos entre sí:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{sen}[\pi(2Wt - n)]}{[\pi(2Wt - n)]} \quad (19)$$

Existen otras expansiones de muestreo que pueden derivarse. De hecho, los espacios de Hilbert con núcleo reproductor asociados con las transformaciones de Fourier, Hankel-Bessel, seno y coseno generan otras tantas expansiones de muestreo. Cada una de estas transformaciones tiene un espacio asociado de señales de banda limitada de energía finita. Se derivará a continuación una expansión de muestreo a partir de los núcleos reproductores introducidos en la sección anterior. El objetivo de tal derivación será contar con una expresión que permita su uso en el diseño de filtros digitales.

Para las transformaciones discretas consideradas en la sección anterior, la aplicación del teorema generalizado de muestreo de Kramer²² resultará en una expansión de muestreo para las funciones f con soporte finito N en el dominio de la transformación.

Sea $f(t)$ una señal de soporte finito N . La suposición básica del teorema de Kramer es la existencia de una señal $g(t)$ de energía finita relacionada con $f(t)$ mediante una función $R(t,x)$. Considérese el caso particular cuando $g(t) = f(t)$ y $R(t,x) = K(t,x)$. Con estas modificaciones y aplicando el teorema de Kramer, se sigue que, si

$$f(t) = \int R(t,x)g(x)dx = \int K(t,x)f(x)dx \quad (20)$$

y si hay un conjunto $E = \{t_n\}$ tal que $\{K(t_n, x)\}$ es un conjunto ortogonal completo sobre $L_2(I)$, entonces

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} f(t_n)S_n(t) = \sum_{|n| \leq N} f(t_n)S_n(t) \quad (21)$$

con

$$S_n(t) = \frac{\int K(t,x)K^*(t_n,x)dx}{\int |K(t_n,x)|^2 dx} \quad (22)$$

donde $K^*(t_n, x)$ denota el conjugado complejo de $K(t_n, x)$. Se debe determinar entonces el conjunto E de puntos y caracterizar a las funciones ortogonales que hacen cumplir el teorema de Kramer dadas las condiciones de aplicación. Si se escoge la transformación de Laguerre, con el polinomio de Laguerre de orden N y parámetro α y, si se usa el núcleo reproductor correspondiente con $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$, la integral siguiente puede calcularse como se indica: (ver ecuación 23)

Para hacer a las funciones $K(x, t_1)$, $K(x, t_2)$ ortogonales, la siguiente igualdad se debe satisfacer,

$$L_N^\alpha(t_1)L_{N+1}^\alpha(t_2) - L_{N+1}^\alpha(t_1)L_N^\alpha(t_2) = 0 \quad (24)$$

$$\int_0^\infty K(x,t_1)K(x,t_2)dx = K(t_1,t_2)$$

$$\int_0^\infty K(x,t_1)K(x,t_2)dx = (t_1 t_2)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t_1+t_2}{2}} \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(N+\alpha+1)} \left[\frac{L_N^\alpha(t_1)L_{N+1}^\alpha(t_2) - L_{N+1}^\alpha(t_1)L_N^\alpha(t_2)}{t_1 - t_2} \right] \quad (23)$$

Con f de soporte finito N , hay $[(N-1)N]/2$ ecuaciones similares a la anterior. Una manera obvia de satisfacer tales ecuaciones al mismo tiempo, es escoger los t_i 's como las raíces $N+1$ del polinomio de Laguerre de orden $N+1$ -ésimo y parámetro α . Con esta escogencia, el conjunto de funciones expresado por (ver ecuación 25)

con $i = 1, \dots, N+1$, forma un conjunto ortogonal de funciones.

Por consiguiente, aplicando el teorema de Kramer para las condiciones establecidas al principio de esta sección,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N+1} f(t_k) S_k(t) \quad (26)$$

donde $\{t_k\}$ son las raíces del polinomio de Laguerre de orden $N+1$ con parámetro α ,

$$S_k(t) = \frac{\int_0^{\infty} K(x,t)K(x,t_k)dx}{\int_0^{\infty} |K(x,t_k)|^2 dx} \quad (27)$$

Si se usa el hecho que t_k es una raíz del polinomio de Laguerre de orden $N+1$ con parámetro α , el denominador puede simplificarse²¹ a (ver ecuación 28)

$$K(x,t_i) = (xt_i)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x+t_i}{2}} \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(N+\alpha+1)} \left\{ \frac{L_N^\alpha(x)L_{N+1}^\alpha(t_i) - L_{N+1}^\alpha(x)L_N^\alpha(t_i)}{x-t_i} \right\} \quad (25)$$

$$K(x,t_i) = (xt_i)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x+t_i}{2}} \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(N+\alpha+1)} \left\{ \frac{-L_{N+1}^\alpha(x)L_N^\alpha(t_i)}{x-t_i} \right\}$$

$$\int_0^{\infty} |K(x,t_k)|^2 dx = \lim_{t_j \rightarrow t_k} \int_0^{\infty} K(x,t_j)K(x,t_k)dx \quad (28)$$

$$\int_0^{\infty} |K(x,t_k)|^2 dx = t_k^{\alpha-1} e^{-t_k} \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(N+\alpha+1)} (N+\alpha+1) [L_N^\alpha(t_k)]^2$$

Para el numerador,

$$\int_0^{\infty} K(x,t)K(x,t_k)dx = K(t,t_k) \quad (29)$$

La expresión final para las funciones ortogonales que integran la expansión de muestreo es,

$$S_k(t) = \frac{t_k \left(\frac{t}{t_k} \right)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t-t_k}{2}} [-L_{N+1}^\alpha(t)]}{(t-t_k)(N+\alpha+1)L_N^\alpha(t_k)} \quad (30)$$

El desarrollo presentado aquí para la transformación de Laguerre, puede aplicarse igualmente para las otras transformaciones mencionadas anteriormente, pudiéndose generar para cada transformación su correspondiente expansión de muestreo. Nuestro interés particular en los polinomios de Laguerre reside en la utilización de las posiciones de sus raíces en el diseño de filtros digitales en el dominio de la frecuencia. Tales posiciones no están uniformemente localizadas, de donde deriva su novedad.

4. EL LUGAR DE LAS RAÍCES DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE

En la Figura 1 se muestra el lugar de las raíces del polinomio de Laguerre de orden 22 para cinco valores del parámetro α . En la figura se muestra también las raíces del polinomio modificado de Laguerre. Este polinomio es definido con la intención de utilizar sus raíces y definir una distribución simétrica de puntos donde colocar los puntos de referencia para el diseño de los filtros digitales mediante el método de las muestras en la respuesta de frecuencia. En la Figura 1. se utiliza una distribución uniforme de puntos (que es la línea recta que separa por la diagonal al cuadro $[0,1] \times [0,1]$ en partes iguales) para que se aprecie la distribución no uniforme que caracteriza a las raíces de los polinomios de Laguerre, colocadas en la mitad inferior de la figura. La Figura 2. nos permite apreciar desde otro punto de vista, la calidad no uniforme de la posición de las raíces de los polinomios de Laguerre, esta vez colocadas en sucesión, desde las raíces de los polinomios modificados a las raíces de los polinomios originales. Los polinomios modificados de Laguerre se definen como

$$R_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(v_n - x) \quad (31)$$

donde v_n es la raíz más grande de $L_n^\alpha(x)$. Para estos polinomios modificados²¹ las funciones ortonormales que integran la correspondiente expansión de muestreo son de la forma, (ver ecuación 32)

donde t_k es una de las $N+1$ raíces de $R_{N+1}^\alpha(t)$.

5. DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL DE FASE LINEAL UTILIZANDO EL LUGAR DE LAS RAÍCES DE POLINOMIOS DE LAGUERRE

El método de diseño de filtros digitales de muestreo en frecuencia busca fijar valores deseados de la respuesta en frecuencia en puntos de frecuencia donde la amplitud satisfaga los requerimientos del diseño. Los métodos que aparecen en la literatura en su mayoría consiguen tales puntos a estar separados uniformemente. Sin embargo, tal y como se explicó en la introducción, también hay propuestas de métodos donde se puede colocar puntos distanciados no uniformemente para realizar el diseño.

El procedimiento de diseño que se propone atañe a un filtro digital FIR (de respuesta finita al impulso) y comienza con la expresión de la respuesta en frecuencia del filtro:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^M h[n] e^{-j\omega T n} \equiv H(\omega) \quad (33)$$

La respuesta al impulso es $h[n]$, el periodo de muestreo es T y la frecuencia en radianes por segundo es ω . Para un diseño de fase lineal, la respuesta en frecuencia debe hacerse simétrica o antisimétrica alrededor de un punto y, en cada caso, M puede ser impar o par. Para un diseño simétrico con M par, (ver ecuación 34)

$$S_k(t) = \frac{e^{(t-t_k)/2} (v_{N+1} - t_k)^{1-\alpha/2} (v_{N+1} - t)^{\alpha/2} R_{N+1}^\alpha(t)}{(t-t_k) L_N^\alpha(v_{N+1} - t_k) (N + \alpha + 1)} \quad (32)$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] e^{-j\omega n T} + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-j(M\omega T)/2} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M h[n] e^{-j\omega n T} \quad (34)$$

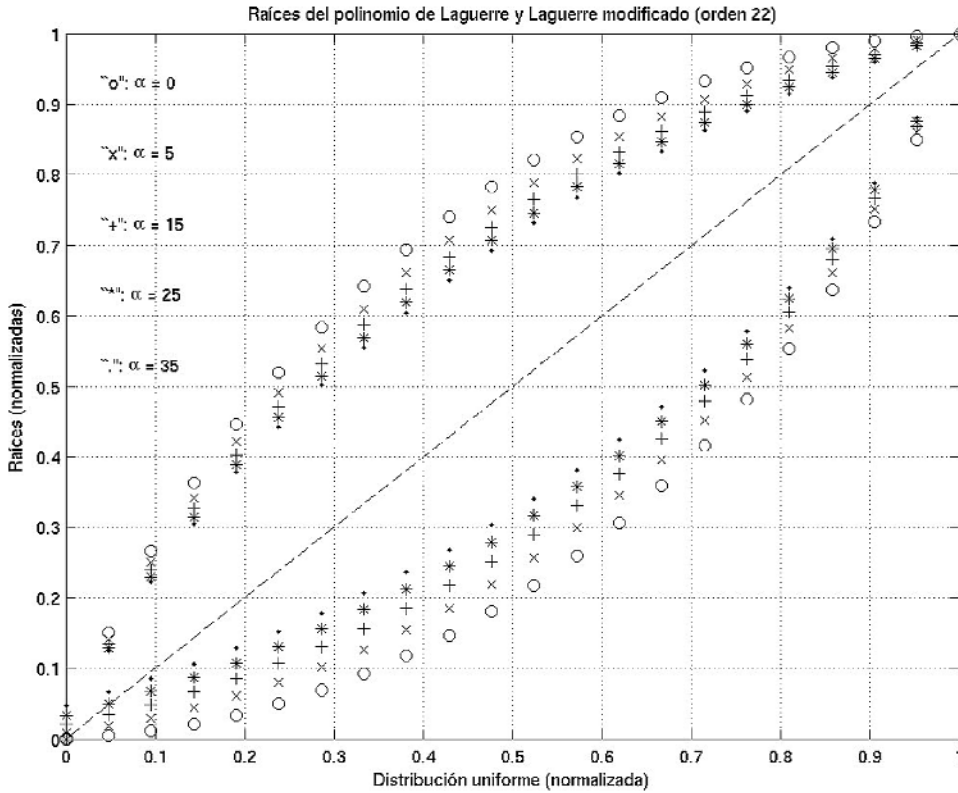


Figura 1. Lugar de las raíces del polinomio de Laguerre de orden 22 con cinco diferentes valores del parámetro α .

que después de algunas operaciones y el uso de simetría cambia a, (ver ecuación 35)

Para un diseño simétrico con M impar (ver ecuación 36),

Las dos ecuaciones anteriores tienen la forma

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-j\omega \frac{M}{2}T} \tag{37}$$

donde $A(\omega)$ es una función real de la variable ω y queda expresada en términos de la respuesta al impulso desconocida $h[n]$, que todo procedimiento de diseño busca precisamente calcular. Como $A(\omega)$ es real, puede aproximarse por la expansión finita de muestreo de la tercera sección de este artículo, obtenida para los polinomios de Laguerre:

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{N+1} f(\gamma_n)S_n(\omega, \gamma_n) \tag{38}$$

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{M}{2}T} \left\{ h\left[\frac{M}{2}\right] + 2 \sum_{i=0}^{\frac{M}{2}-1} h[i] \cos\left[\left(\frac{M}{2} - i\right)\omega T\right] \right\} \tag{35}$$

$$H(\omega) = 2e^{-j\omega \frac{M}{2}T} \sum_{i=0}^{\frac{M-1}{2}} h[i] \cos\left[\left(\frac{M-2i}{2}\right)\omega T\right] \tag{36}$$

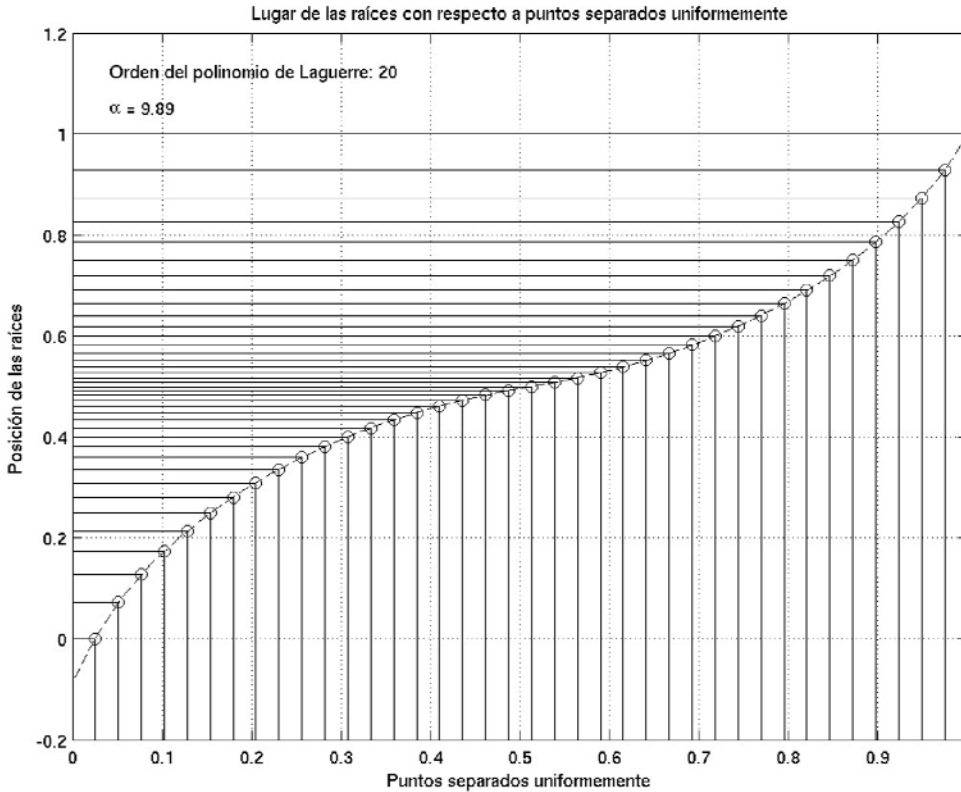


Figura 2. Posición de las raíces del polinomio de Laguerre de orden 20 y parámetro $\alpha = 9.89$, incluyendo las raíces del polinomio modificado de Laguerre del mismo orden y parámetro, mostrando sus posiciones con respecto a puntos separados uniformemente.

Los valores $\{\gamma_n\}$ son las raíces de polinomios ortogonales donde el diseñador puede hacer que la respuesta en frecuencia tome valores específicos. Variando el parámetro α asociado con los polinomios de Laguerre, el lugar de las raíces cambia y, con él, la posición de las muestras.

Para diseñar un filtro pasabajo de fase lineal simétrico alrededor de su punto medio con M par, se establece la siguiente ecuación: (Ver ecuación 39)

A la derecha de esta última ecuación, hay $M/2 + 1$ incógnitas y a la izquierda, $N + 1$. De modo que, $M/2 = N$. Extendiendo esta ecuación a L frecuencias $\{\omega\}$, el sistema sobredeterminado de

ecuaciones lineales es resuelto usando la descomposición de valor singular (SVD, por sus siglas en inglés), que proporciona una solución lineal de mínimos cuadrados para la respuesta al impulso $h(n)$. La respuesta al impulso (o lo que es lo mismo, los coeficientes del filtro) tendrá una norma mínima en el sentido euclidiano²³. El número L de frecuencias debe ser mayor o igual a $M/2 + 1$. El sistema sobredeterminado de ecuaciones se escribe como $B\underline{h} = \underline{d}$, donde \underline{h} es el vector de coeficientes del filtro, \underline{d} el vector de valores de la expansión de muestreo y B la matriz que se origina de la evaluación de la función coseno en la última ecuación, cuyas entradas están caracterizadas por entradas de la forma

$$\sum_{n=1}^{N+1} f(y_n) S_n(\omega, \gamma_n) = h \left[\frac{M}{2} \right] + 2 \sum_{i=0}^{\frac{M}{2}-1} h[i] \cos \left[\left(\frac{M}{2} - i \right) \omega T \right] \quad (39)$$

$$2 \cos \left[\left(\frac{M}{2} - i \right) \omega_j T \right] \quad (40)$$

donde $j = 1, \dots, L$ e $i = 0, \dots, M/2 - 1$. La solución del sistema se obtiene en términos de los vectores singulares derechos v y de los valores singulares $\{\sigma_i\}$ correspondientes a la descomposición de valor singular de B:

$$\underline{h} = \sum_{i=1}^W \frac{1}{\sigma_i} \underline{v}_i \underline{v}_i^T B^T \underline{d} \quad (41)$$

donde W es el rango de B, definido como el número de columnas linealmente independientes de la matriz. La solución es consistente porque W iguala el número de elementos de \underline{h} . Este método de diseño difiere de otros enfoques en el uso de una expansión que especifica completamente la respuesta de frecuencia en el dominio correspondiente y, como resultado, incluye una banda de transición suave que reduce el rizado de aproximación^{4,5}. La Figura 3. muestra cuatro diferentes diseños para un filtro digital pasabajo con frecuencia de corte 0.1 (normalizada), con atenuación mínima de 50 dB en la banda de rechazo y

veinte coeficientes diferentes en la respuesta al impulso por diseño. Nótese la mejora significativa que alcanza el método propuesto con respecto a los otros métodos. La expansión de muestreo para este diseño usó un polinomio de Laguerre de orden 20 y parámetro $\alpha = 9,89$.

Otro ejemplo será provisto para ilustrar la técnica de diseño propuesta. El diseño de un filtro rechaza-banda de fase lineal presenta una doble simetría, una alrededor de $M/2$ y otra alrededor de $M/4$, para M par. Para hallar las correspondientes ecuaciones de diseño, la respuesta en frecuencia se reescribe de la siguiente manera, tomando en cuenta las simetrías de este caso, (ver ecuación 42)

que después de algunas manipulaciones algebraicas se convierte en (ver ecuación 43)

Llegados a este punto, se puede proceder como antes, igualando la expansión de muestreo a la magnitud de la respuesta en frecuencia: (ver ecuación 44)

Del lado derecho de esta última expresión, hay $M/4 + 1$ incógnitas y del lado izquierdo, $N + 1$.

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^M h[n] e^{-j\omega nT} \\ &= h[0] + \sum_{n=1}^{\frac{M}{4}-1} h[n] e^{-j\omega nT} + h\left[\frac{M}{4}\right] e^{-j\omega \frac{M}{4}T} + \sum_{\frac{M}{4}+1}^{\frac{M}{2}-1} h[n] e^{-j\omega nT} + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-j\omega \frac{M}{2}T} \\ &\quad + \sum_{\frac{M}{2}+1}^{\frac{3M}{4}-1} h[n] e^{-j\omega nT} + h\left[\frac{3M}{4}\right] e^{-j\omega \frac{3M}{4}T} + \sum_{\frac{3M}{4}+1}^{M-1} h[n] e^{-j\omega nT} + h[M] e^{-j\omega MT} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} e^{j\omega \frac{M}{2}T} H(\omega) - h[0] &\left[1 + 2\cos\left(\omega \frac{M}{2}T\right) \right] + \sum_{i=1}^{\frac{M}{4}-1} 2h[i] \left[\cos\left[\left(\frac{M}{2} - i\right)\omega T\right] + \cos(i\omega T) \right] \\ &+ 2h\left[\frac{M}{4}\right] \cos\left(\omega \frac{M}{4}T\right) \end{aligned} \quad (43)$$

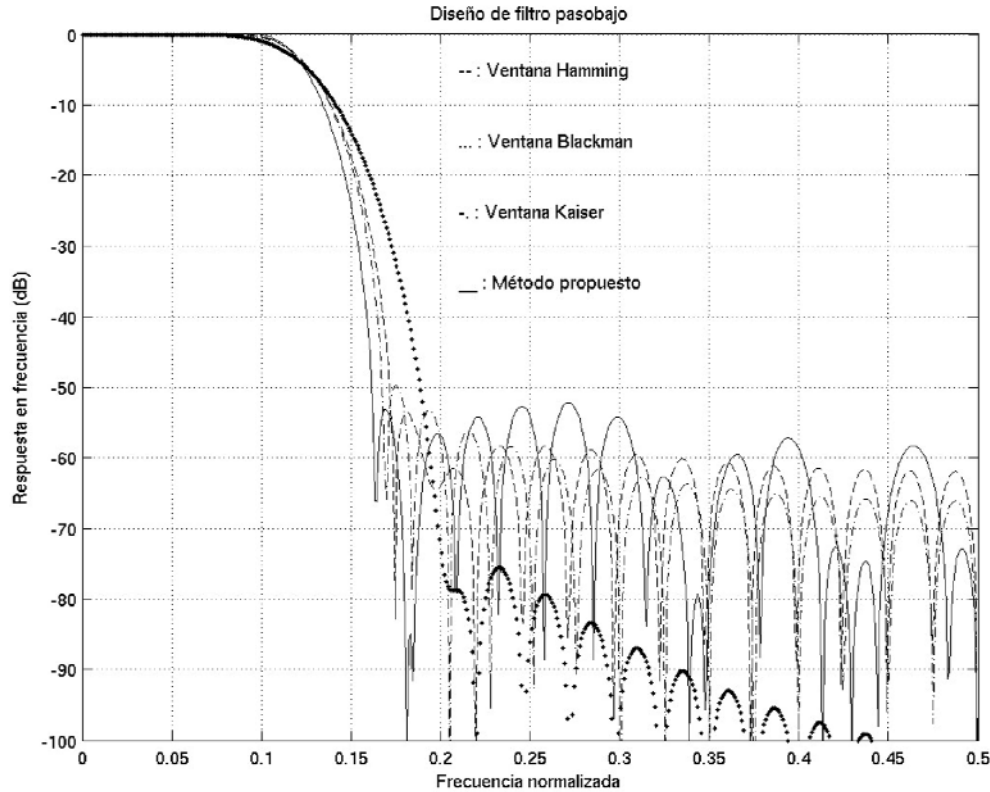


Figura 3: Filtro pasobajo con frecuencia de corte en 0.1 (normalizada). Tres métodos de diseño de filtros digitales de respuesta finita al impulso con fase lineal se comparan con el diseño resultante del método propuesto.

$$A(\omega) = h[0] \left[1 + 2 \cos \left(\omega \frac{M}{2} T \right) \right] + \sum_{i=1}^{\frac{M}{4}-1} 2h[i] \left[\cos \left[\left(\frac{M}{2} - i \right) \omega T \right] + \cos(i \omega T) \right] + 2h \left[\frac{M}{4} \right] \cos \left(\omega \frac{M}{4} T \right) \quad (44)$$

De modo que $M/4 = N$, con M par. Estableciendo otra vez un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales, una solución lineal de mínimos cuadrados puede calcularse para $h[n]$.

La Figura 4. muestra los resultados de diseñar un filtro rechazabanda de respuesta finita al impulso con frecuencias de corte en 0,1 y 0,4, con atenuación mínima en la banda de rechazo de 50 dB. Se emplea 21 coeficientes diferentes en el diseño, logrando que la banda de transición sea

más corta para el diseño de este método propuesto, pero con la desventaja de no conseguir la meta de la atenuación mínima por 2 dB. La expansión de muestreo usó un polinomio de Laguerre de orden 11 y parámetro $\alpha = 202$.

El método de diseño propuesto aquí es interactivo e involucra una serie de ensayos para conseguir las características deseadas. No es cualquier colocación no uniforme de muestras la que proporciona un diseño óptimo que satisfaga

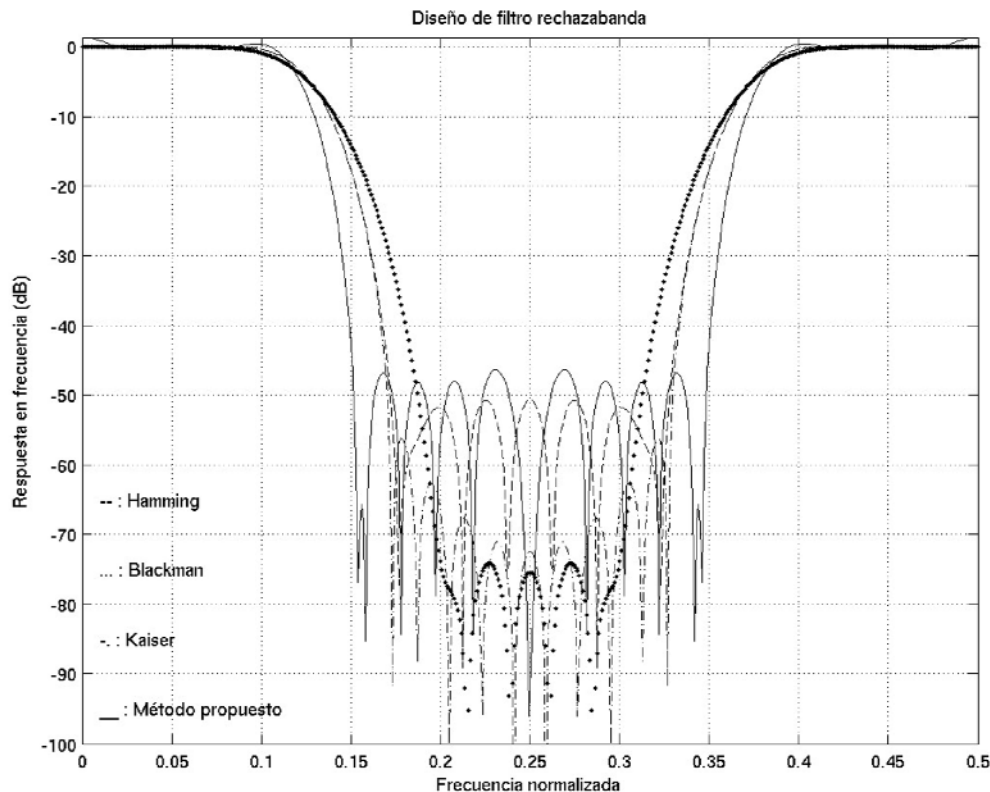


Figura 4. Filtro rechazabanda con frecuencias de corte en 0,1 y 0,4. Tres métodos basados en ventanas para el diseño de filtros digitales de respuesta finita al impulso y fase lineal se comparan contra el diseño obtenido usando el método propuesto.

los requerimientos de mínima atenuación y las frecuencias de corte dadas, como fue ya observado en ⁹. Para ambos ejemplos presentados aquí, dos de las muestras no-uniformes fueron colocadas en la banda de transición para disminuir los rizados de aproximación en la banda de rechazo y para mejorar la atenuación, técnica común que se emplea en los métodos de diseño de filtros digitales que emplean la técnica de muestreo en frecuencia¹. Para el diseño pasobajo, a una muestra de transición fue dada el valor 0,69 y a la otra 0,18. Para el diseño rechazabanda, los valores para las muestras de transición fueron 0,92 y 0,23. El resto de las muestras tomaron los valores 1 ó 0. Los rizados de aproximación en la banda de paso para ambos diseños fueron inferiores a 2 dB.

6. CONCLUSIONES

Utilizando una expansión de muestreo dependiente de muestras espaciadas de acuerdo con el lugar de las raíces de polinomios clásicos ortogonales, se propone un método de diseño de filtros digitales de respuesta finita al impulso con fase lineal. Este método da muy buenos resultados si se toma en cuenta que, bajo condiciones de similitud en el número de coeficientes del filtro, el diseño resultante del método aquí presentado entrega una atenuación comparable o mejor junto con una banda de transición más angosta, al compararse contra tres diseños diferentes obtenidos usando la técnica de diseño de filtros digitales con ventanas.

La novedad del método que se propone reside en: (1) la utilización del lugar de las raíces de polinomios ortogonales, para colocar las muestras de la respuesta en frecuencia, según la técnica de muestreo en frecuencia para el diseño de filtros digitales; tales posiciones son implícitamente no uniformes; (2) el empleo de expansiones derivadas del teorema de muestreo generalizado de Kramer y, (3) el uso de dos muestras posicionadas convenientemente en la banda de transición para disminuir el rizado de aproximación y mejorar la atenuación alcanzada en la banda de rechazo.

NOTAS

- a. A esta serie se le conoce como expansión en series ortonormal de f con respecto a $\{\psi_n\}$.
- b. Otras definiciones de una señal de banda limitada pueden encontrarse en la referencia 18.

BIBLIOGRAFÍA

1. Jackson, L. B.; *Digital Filters and Signal Processing*. Tercera edición. Kluwer Academic Publishers: Boston, 1 996.
2. Antoniou, A.; *Digital Filters: Analysis, Design and Applications*. Segunda edición. McGraw-Hill, Inc.: New York, 1 993.
3. Bose, N. K.; *Digital Filters: Theory and Applications*. Elsevier Science Publishing Co., Inc.: New York, 1 985.
4. Gopinath, R. A.; "Thoughts on Least Squared-Error Optimal Windows", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 44, pp. 984-987, abril 1 996.
5. Burrus C. S. ; Soewito A. W. y Gopinath R. A., "Least Squared Error FIR Filter Design with Transition Bands", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 40, pp. 1 327-1 340, junio 1 992.
6. Cheng, D. K.; *Analysis of Linear Systems*, capítulo 5, página 127. Segunda impresión de la primera edición. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.: Reading, Massachusetts, 1 961.
7. Romero J. ; Plotkin E. I. , "Nonuniform sampling based on the use of root loci of orthogonal polynomials", en Proceedings of the 1995 Workshop on Sampling Theory and Applications, (Jurmala, Latvia), pp. 49-54, Institute of Electronics and Computer Science, 19 al 22 de setiembre de 1 995.
8. Summers B. , G. D.; Cain y A. Yardim, "FIR digital filter design using non-equispaced frequency sampling", Electronics Letters, vol. 25, pp. 338-339, 2 de marzo de 1 989.
9. Bozic S. y Soltani F. ; "FIR design by non-uniform sampling in frequency domain", International Journal of Electronics, vol. 65, no. 4, pp. 815-821, 1 988.
10. Rozwod W. J. ; Therrien C. W. y Lim J. S. ; "Design of 2-D FIR filters by nonuniform frequency sampling", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 39, pp. 2 508-2 514, noviembre de 1 991.
11. Zakhor A. y Alvstad G. ; "Two-dimensional polynomial interpolation from nonuniform samples", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 40, pp. 169-180, enero de 1 992.
12. Angelidis E. y Diamessis J. ; "A novel method for designing FIR digital filters with nonuniform frequency samples", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 42, pp. 259-267, febrero de 1 994.
13. Algazi V. y Suk M.; "On the frequency weighted least-square design of finite duration filters", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 22, pp. 943-953, diciembre de 1 975.

14. Kim J. T. , Oh W. J. y Lee Y. H. ; “*Design of nonuniformly spaced linear-phase FIR filters using mixed integer linear programming*”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 44, pp. 123-126, enero de 1996.
15. Bagchi S. y Mitra S. K. ; “*The Nonuniform Discrete Fourier Transform*”, en Nonuniform Sampling: Theory and Practice, editado por F. Marvasti, New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, pp. 325-360, 2001.
16. Hille E. ; “*Introduction to general theory of reproducing kernels*”, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 2, pp. 321-368, verano 1 972.
17. Aronszajn N. ; “*Theory of reproducing kernels*”, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 68, pp. 337-404, 1950.
18. Requicha A. A. G. ; “*The zeros of entire functions: Theory and engineering applications*”, Proceedings of the IEEE, vol. 68, pp. 308-328, marzo de 1 980.
19. Zemanian; A. H. *Generalized Integral Transformations*; capítulo 9, pp. 247-285. New York: Dover Publications, Inc., 1 987.
20. Szegő, G.; *Orthogonal Polynomials, vol. XXIII* de Colloquium Publications, capítulos 4-5, pp. 57-106. New York: American Mathematical Society, 1939.
21. Romero; J.; *Signal Processing based on Irregular Sampling: Reconstruction, Compression, and Signal Transformation*. Tesis de doctorado. Montréal: Concordia University, 1996.
22. H. P. Kramer; “*A generalized sampling theorem*”, Journal of Mathematics and Physics, vol. 38, pp. 68-72, 1959.
23. Haykin, S.; *Adaptive Filter Theory*, capítulo 11, p. 527. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, tercera edición, 1996.

SOBRE EL AUTOR

Dr. Jorge Romero Chacón

Profesor Catedrático de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica

Tel: 207-4700.

Correo electrónico: jromero@eie.ucr.ac.cr